

基于高阶双线性相位匹配变换的 PPS 瞬时频率变化率估计^{*}

王 勇^{**} 姜义成

哈尔滨工业大学电子与信息技术研究院, 哈尔滨 150001

摘要 提出了一种高阶双线性相位匹配变换算法, 可实现对任意阶次多项式相位信号(PPS)瞬时频率变化率(IFR)的估计. 从理论上分析了该算法的统计特性, 计算机仿真结果表明: 当输入信噪比超过 2 dB 时, 仿真结果(IFR 估值的均方误差)非常接近理论值, 并逐渐接近其 Cramer-Rao 下限.

关键词 高阶双线性相位匹配变换 多项式相位信号 瞬时频率变化率 统计特性

多项式相位信号 (polynomial phase signal, PPS) 是自然界中一种常见的信号, 被广泛地应用在雷达、声纳以及生物工程等领域. 对于 PPS 的分析与处理一直是信号处理领域的重要研究内容, 其中, PPS 的参数估计问题是所有研究内容中最为重要、最为基本的, 也是迄今为止尚未完全解决的. 对此, 人们做了大量工作, 主要可从以下几个方面来说明: (i) 各种基于最大似然 (maximum likelihood, ML) 估计的算法. 这些算法可归结为多变量的最优化问题, 其对 PPS 参数的估计精度取决于搜索过程中所采用的步长大小, 计算量非常大^[1,2], 一般情况下很难承受; (ii) 基于时频分析的算法. 其中, 最为主要的是基于 Cohen 类时频分布的方法, 首先计算出信号的时间—频率二维联合分布, 进而通过计算不同时间采样点所对应的频率值获得 PPS 的参数估计^[3]. 该方法对于高阶 (阶次大于 2) 的 PPS, 会产生自交叉项的影响, 不利于参数估计; (iii) 基于高阶模糊度函数的方法. 此类方法是基于离散 Fourier 变换从 PPS 中估计正弦型信号频率的方法. 当信号相位阶次较高且信号分量数目较多时, 由于交叉项干

扰的存在, 该方法有可能失效, 同时该方法存在较大的误差传递效应^[4,5].

文献 [6] 对于 PPS 的参数估计问题, 首先提出了 PPS 信号瞬时频率变化率 (instantaneous frequency rate, IFR) 的概念. 同时, 针对三次相位 (立方调频) 信号的特殊情形, 提出采用双线性相位匹配变换来估计 IFR 的方法, 然后通过计算不同时刻的 IFR 值, 进而得到三阶 PPS 的参数估计^[7,8]. 文献 [9] 将以上方法推广到五阶 PPS, 而且是通过二维搜索来实现的, 计算量非常大. 同时, PPS 的最高相位阶次每增加二次, 就增加一维搜索, 致使计算量急剧增加, 不利于具体应用.

为此, 本文提出了一种估计任意阶次多项式相位信号 (PPS) 瞬时频率变化率 (IFR) 的方法. 该方法基于文中提出的高阶双线性相位匹配变换 (high order bilinear matched-phase transform, HPT) 原理, 在估计信号的 IFR 时, 只需进行一维搜索, 计算量小; 同时文中采用一阶扰动分析原理^[10] 详细推导了该方法的统计特性, 计算机仿真结果验证了理论推导的正确性.

2008-03-29 收稿, 2008-05-16 收修改稿

* 教育部博士点基金 (批准号: 20060213009)

** E-mail: wangyong6012@hit.edu.cn

©1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

1 基于 HPT 的 IFR 估计方法

考虑如下形式的多项式相位信号

$$z(n) = b_0 e^{j\phi(n)}, \quad -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \quad (1)$$

其中 $\phi(n)$ 为信号相位, 具有如下形式

$$\phi(n) = \sum_{p=0}^P a_p n^p \quad (2)$$

这里 P 为多项式相位信号 $z(n)$ 的阶数 (取 $P \geq 2$), $\{b_0, a_p |_{p=0}^P\}$ 为待估计参数, N 为信号长度 (奇数), 采样率取为 1. 文献[6]定义 $z(n)$ 的 IFR 为相位 $\phi(n)$ 的二阶导数, 即

$$IFR(n) = \frac{d^2 \phi(n)}{dn^2} \quad (3)$$

因此, 对于如(1)和(2)式所示的 P 阶 PPS, 其 IFR 为一 $(P-2)$ 阶 PPS, 即

$$IFR(n) = \sum_{p=2}^P P(P-1) a_p n^{p-2} \quad (4)$$

此时, 分别计算 $P-1$ 个不同 n 值 ($n_1 \sim n_{P-1}$) 所对应的 IFR ($IFR(n_1) \sim IFR(n_{P-1})$), 即可得到参数 a_p ($p=2, 3, \dots, P$) 的估计, 而参数 a_1, a_0 和 b_0 的估计可通过对原信号 $z(n)$ 解调频来实现^[7]. 以上即为基于 PPS 信号的 IFR 来估计其参数的基本原理.

下面, 本文按照(1)和(2)式所示的 P 阶 PPS (在许多应用场合, PPS 信号的相位阶数 P 是未知的, 其确定方法可参阅文献[11]. 因此, 在本文以后的讨论中, 均假设 P 已知)模型, 提出基于 HPT 的 IFR 估计方法. 首先, 有如下定义

定义 1 P 阶多项式相位信号 $z(n)$ 的 HPT 定义为下式

$$HPT(n, \Omega) = \sum_{m=0}^{(N-1)/2} K(n, m) e^{-jA_0 \Omega m^2} \quad (5)$$

下面, 对(5)式做如下 4 点说明:

(1) $K(n, m)$ 为 HPT 的核函数, 具有如下形

式

$$K(n, m) = \prod_{i=1}^I [z(n+cm) z(n-cm)]^{*u_i} \quad (6)$$

其中对于 P 阶 PPS, 当 P 为偶数时, $I=P-1$; 当 P 为奇数时, $I=P-2$, 即 I 为奇数. c_i ($i=1, 2, \dots, I$) 为待定系数 ($c_i \neq c_k, i \neq k$, 同时 c_i 为实数). $\{\circ\}^{*u_i}$ 的含义为: 当 $u_i=1$ 时, 对 $\{\circ\}$ 取复共轭; 当 $u_i=0$ 时, 对 $\{\circ\}$ 不取复共轭.

(2) A_0 为一常数, 它与系数 c_i ($i=1, 2, \dots, I$) 具有如下关系

$$A_0 = \sum_{i=1}^I c_i^2 f(u_i) \quad (7)$$

其中 $f(u_i)$ 为一二值函数, 定义为

$$f(u_i) = \begin{cases} 1 & u_i = 0 \\ -1 & u_i = 1 \end{cases} \quad (8)$$

(3) 当系数 c_i ($i=1, 2, \dots, I$) 满足如下条件时

$$\sum_{i=1}^I c_i^{2l+2} f(u_i) = 0, \quad l=1, 2, \dots, (I-1)/2 \quad (9)$$

对于(1)和(2)式所示的 P 阶 PPS 模型, 其 HPT(n, Ω) 具有如下形式

$$HPT(n, \Omega) = b_0^{2I} e^{2j\phi(n)} \sum_{i=1}^I f(u_i) \sum_{m=0}^{(N-1)/2} e^{jA_0 m^2 [IFR(n)-\Omega]} \quad (10)$$

由上式可见, 通过对 $HPT(n, \Omega)$ 进行一维峰值搜索, 即可获得 IFR 的估计

$$IFR(n) = \arg \max_{\Omega} |HPT(n, \Omega)| \quad (11)$$

(4), (7)和(9)式的来源(理论依据)为: 将(1)和(2)式所示的 P 阶 PPS 模型代入到(5)式中, 并结合(6)式, 可以得到

$$z(n+cm) z(n-cm) = b_0^2 e^{j[\phi(n+cm) + \phi(n-cm)]} \quad (12)$$

分别对 $\phi(n+cm)$ 和 $\phi(n-cm)$ 在 n 处做 Taylor 级数展开, (12)式可以写为

$$z(n+cm)z(n-cm) = b_0^2 e^{\left\{ 2\phi^{(2k)}(n) \sum_{k=1}^I \frac{1}{(2k)!} (c_i m)^{2k} \right\}} \quad (13)$$

在上式中, $\phi^{(s)}(n)$ 是 $\phi(n)$ 的 s 阶导数. 当 $s=2$ 时, $\phi^{(2)}(n)$ 即为信号 $z(n)$ 的 IFR. 将(13)式代入到(6)式中, 可以得到 m^{2k} 的系数 d_k ($k=1, 2, \dots, (I+1)/2$) 的表达式为

$$d_k = \left[\frac{2}{(2k)!} \sum_{i=1}^I \phi^{(2k)}(n) c_i^{2k} f(u_i) \right] \quad (14)$$

因此, 令 $d_1 = A_0 \phi^{(2)}(n)$, 且 $d_2 = d_3 = \dots = d_{\frac{I+1}{2}} = 0$, 即可得到信号 IFR 的估计. 此即为(7)和(9)式的理论依据, 同时也可以得到(10)式.

下面, 分别以 $P=5$ 和 $P=6$ 为例, 给出其 $HPT(n, \Omega)$ 中的系数 c_i ($i=1, 2, \dots, I$) 与常数 A_0 的数值结果:

(1) $P=5$, 此时 $I=3$, $c_1=0.7746$, $c_2=0.8944$, $c_3=1$, $A_0=0.4$, $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=1$;

(2) $P=6$, 此时 $I=5$, $c_1=0.7$, $c_2=0.8$, $c_3=0.6$, $c_4=0.7648$, $c_5=0.4553$, $A_0=-0.1324$, $u_1=0$, $u_2=1$, $u_3=1$, $u_4=0$, $u_5=1$.

注1 由于系数 c_i ($i=1, 2, \dots, I$) 均为小数, 因此在计算 $HPT(n, \Omega)$ 时, 类似多项式 Wigner-Ville 分布, 需对原始数据进行插值处理以获得非整数采样点处的数据值. 本文采用 sinc 函数插值.

2 统计特性分析

本节研究在加性 Gauss 白噪声影响下, 基于 HPT 来估计 IFR 方法的统计特性, 这里采用一阶扰动分析技术. 首先考虑加性噪声中的离散信号

$$s(n) = z(n) + v(n), \quad -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \quad (15)$$

其中 $v(n)$ 为加性 Gauss 白噪声, 均值为零, 方差为 σ^2 . $z(n)$ 为 P 阶 PPS, 如(1)和(2)式所示. 在计算信号 $s(n)$ 的 IFR 时, 为方便计, 这里只计算 $n=0$

处的 IFR 值. 此时, 对于无噪信号 $z(n)$, 其 HPT 为

$$HPT(n, \Omega) |_{n=0} = HPT(\Omega) = \sum_{m=0}^{(N-1)/2} \left\{ \prod_{i=1}^I [z(cm)z(-cm)]^{*u_i} \right\} e^{-jA_0 \Omega m^2} \quad (16)$$

由 IFR 的定义可知, 上式在 $\Omega=2a_2$ 处达到最大值. 但在噪声的影响下, $HPT(\Omega)$ 最大值的位置随机地飘移到 $\Omega=2a_2 + \delta\Omega$ 处, 相应引起的 $HPT(\Omega)$ 的偏移量为

$$\delta HPT(\Omega) = \sum_{m=0}^{(N-1)/2} s_{zv}(m) e^{-jA_0 \Omega m^2} \quad (17)$$

其中

$$s_{zv}(m) = \prod_{i=1}^I [s(cm)s(-cm)]^{*u_i} - \prod_{i=1}^I [z(cm)z(-cm)]^{*u_i} \quad (18)$$

此时, 由一阶扰动分析原理, 有

$$E\{\delta\Omega^2\} = E\left\{ \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right\} \quad (19)$$

这里

$$\alpha = 2\text{Re} \left\{ HPT(2a_2) \frac{\partial HPT^*(2a_2)}{\partial \Omega} + \frac{\partial HPT(2a_2)}{\partial \Omega} HPT^*(2a_2) \right\} \quad (20)$$

$$\beta = 2\text{Re} \left\{ HPT(2a_2) \frac{\partial^2 HPT^*(2a_2)}{\partial \Omega^2} + \frac{\partial HPT(2a_2)}{\partial \Omega} \frac{\partial HPT^*(2a_2)}{\partial \Omega} \right\} \quad (21)$$

其中, $E\{\cdot\}$ 表示求数学期望算子, $\text{Re}\{\cdot\}$ 为取实部算子.

由(19)-(21)式, 可以得到如下结果:

$$HPT(2a_2) \approx b_0^I e^{j\varphi(n)} \frac{N}{2} \quad (22)$$

$$\frac{\partial HPT(2a_2)}{\partial \Omega} \approx jA_0 b_0^{2I} e^{j\varphi(n)} \frac{N^3}{24} \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 HP T(2a_2)}{\partial \Omega^2} \approx A_0^2 b_0^{2I} e^{j\varphi(n)} \frac{N^5}{160} \quad (24)$$

$$\mathfrak{HPT}(2a_2) = \sum_{m=0}^{(N-1)/2} s_{zv}(m) e^{-jA_0 2a_2 m^2} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{HPT}(2a_2)}{\partial \Omega} = -jA_0 \sum_{m=0}^{(N-1)/2} m^2 s_{zv}(m) e^{-jA_0 2a_2 m^2} \quad (26)$$

其中, $\varphi(n) = 2\phi(n) \sum_{i=1}^I f(u_i)$. 因此, 有

$$\alpha \approx b_0^{2I} A_0 \frac{N}{2} \times \text{Im} \left\{ e^{j\phi(n)} \sum_{m=0}^{(N-1)/2} \left(2m^2 - \frac{N^2}{6} \right) s_{zv}^*(m) e^{jA_0 2a_2 m^2} \right\} \quad (27)$$

$$\beta \approx \frac{A_0^2 b_0^{4I} N^6}{360} \quad (28)$$

其中 $\text{Im}\{\cdot\}$ 为取虚部算子. 将(27)和(28)式代入到(19)式中, 并结合噪声的性质, 可以得到随机变量 $\mathfrak{R}\Omega$ 的统计特性

$$E\{\mathfrak{R}\Omega^2\} \approx \frac{129600}{b_0^{4I} A_0^2 N^{10}} V \quad (29)$$

其中

$$V = \frac{b_0^{4I} N^5}{720} \left[\left(1 + \frac{1}{SNR} \right)^{2I} - \frac{2I + SNR}{SNR} \right] + \frac{b_0^{4I}}{2SNR} \sum_{m_1=0}^{(N-1)/2} \left[\sum_{m_2=0}^{(N-1)/2} \left[\left(m_1^2 - \frac{N^2}{12} \right) \left(m_2^2 - \frac{N^2}{12} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^I \left[(-1)^{(u_i+u_k)} \text{sinc}(c_k m_2 - c_i m_1) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \begin{aligned} &(-1)^{(u_i+u_k)} \text{sinc}(c_k m_2 + c_i m_1) + \\ &(-1)^{(u_i+u_k)} \text{sinc}(-c_k m_2 - c_i m_1) + \\ &(-1)^{(u_i+u_k)} \text{sinc}(-c_k m_2 + c_i m_1) \end{aligned} \right] \right] \right] \quad (30)$$

注 2 上式的获得考虑了插值因素的影响(本文采用 sinc 函数插值). 其中 SNR 为输入信噪比, 定义为 $SNR = \frac{b_0^2}{\sigma}$. 综合(29)和(30)式, 可以得到 $E\{\mathfrak{R}\Omega^2\} \propto N^{-5}$, 即 IFR 估计的均方误差与相应的 Cramer-Rao 下限^[12]关于 N 的收敛性具有相同的数量级

3 仿真实验

下面通过计算机仿真实验来说明本文方法的实际效果, 并验证算法统计特性理论推导的正确性. 整个实验分两部分:

实验 1 分别以 5 阶 PPS 和 6 阶 PPS 为例, 计算其 IFR 分布图. 信号的样本长度取为 255, 采样率取为 1. 各参数值如下: (i) $P=5$, $b_0=8$, $a_0=0$, $a_1=0$, $a_2=4\pi \times 10^{-4}$, $a_3=-2.79\pi \times 10^{-5}$, $a_4=0$, $a_5=9\pi \times 10^{-10}$; (ii) $P=6$, $b_0=1$, $a_0=1$, $a_1=\frac{\pi}{8}$, $a_2=5 \times 10^{-3}$, $a_3=1 \times 10^{-5}$, $a_4=5 \times 10^{-8}$, $a_5=4.5 \times 10^{-10}$, $a_6=1 \times 10^{-13}$.

注 3 为避免由于信号频谱变换的循环特性而产生的模糊现象, 这里假定信号分量参数满足条件^[8]

$$|a_i| \leq \frac{\pi}{i! \left(\frac{N}{2} \right)^{i-1}}, i = 1, 2, \dots, P \quad (31)$$

其中 N 为信号长度, 这里 $N=255$.

图 1(a)和(b)分别为这两个多项式相位信号的 IFR 二维分布图, 其中系数 $c_i (i=1, 2, \dots, I)$ 与常数 A_0 的数值选取已在本文第 2 节中给出. 可见, 采用文中所提出的基于 HPT 的 IFR 估计方法对 PPS 来说是有效的, 图 1 清楚地反映了这两个信号的 IFR 随时间的变化情况(对原信号做 5 倍 sinc 函数插值).

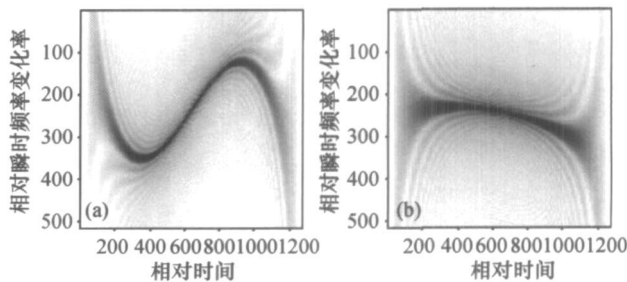


图 1 仿真信号 IFR 二维分布图
(a) 5 阶 PPS; (b) 6 阶 PPS

实验 2 本实验的目的是为了验证文中第 3 节统计特性理论推导的正确性. 为方便计, 这里以一 4 阶 PPS 为例, 信号的样本长度取为 255, 采样率

取为1, 各参数值为: $b^0=1$, $a^0=1$, $a^1=\frac{\pi}{8}$, $a^2=5 \times 10^{-3}$, $a^3=1 \times 10^{-5}$, $a^4=5 \times 10^{-8}$. 计算 IFR 时选取的系数为: $c_1=0.7746$, $c_2=0.8944$, $c_3=1$, $A_0=0.4$, $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=1$. 噪声为零均值 Gauss 白噪声. 改变输入信噪比从-4 到 11 dB, 以 1dB 为步长, Monte-Carlo 实验次数为 100. 图 2 给出了 IFR 估值均方误差 (mean square error, MSE) 的理论分析与仿真结果比较, 其中, 圆点为仿真结果, 点划线为理论推导结果, 实线为 Cramer-Rao 下限. 可见, 在信噪比较高时 (≥ 2 dB), 仿真结果与理论结果非常接近, 且逐渐接近 Cramer-Rao 下限; 而随着信噪比的降低, 仿真结果与理论结果之间的误差增大, 这是因为分析过程中的近似条件不再成立而造成的.

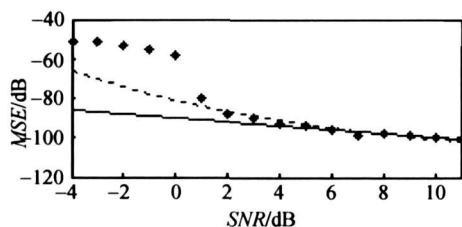


图 2 IFR 估计方差的理论分析与仿真结果比较

4 结论

通过文中定义的高阶双线性相位匹配变换算法, 可实现对任意阶次多项式相位信号瞬时频率变化率的估计. 该方法实现起来简单, 且具有很好的估计性能, 为多项式相位信号参数估计提供了一个新的思路, 具有较好的应用前景与价值.

参 考 文 献

- 1 Abatzoglou T. Fast maximum likelihood joint estimation of frequency and frequency rate. *IEEE Trans on AES*, 1986, 22(6): 708-715
- 2 Liang RM, Arun KS. Parameter estimation for superimposed chirp signals. *ASSP*, 1992, 5: 273-276
- 3 Cohen L. Time-frequency distributions—A review. *Proc IEEE*, 1989, 77(7): 941-981
- 4 Barbarossa S, Petrone V. Analysis of polynomial-phase signals by an integrated generalized ambiguity function. *IEEE Trans on SP*, 1997, 44(2): 316-327
- 5 Barbarossa S, Scaglione A, Giannakis G. Product high-order ambiguity function for multi-component polynomial phase signal modeling. *IEEE Trans on SP*, 1998, 46(3): 691-708
- 6 O'shea P. A new technique for instantaneous frequency rate estimation. *IEEE Signal Processing Letters*, 2002, 9(8): 251-252
- 7 O'shea P. A fast algorithm for estimating the parameters of a quadratic FM signal. *IEEE Trans on SP*, 2004, 52(2): 385-393
- 8 Farquharson M, O'shea P, Ledwich G. A computationally efficient technique for estimating the parameters of Polynomial-Phase signals from noisy observations. *IEEE Trans on SP*, 2005, 53(8): 3337-3342
- 9 刘庆云, 张汉灵, 梁红. 多分量多项式相位信号瞬时频率变化率的估计. *电子学报*, 2005, 33(10): 1890-1892
- 10 Peleg S, Porat B. Linear FM signal parameter estimation from discrete-time observations. *IEEE Trans on AES*, 1991, 27(4): 607-616
- 11 Ikram MZ, Zhou GT. Order determination and parameter estimation of multicomponent polynomial phase signals. *Proc. 9th IEEE Workshop on Statistical Signal and Array Processing*. Portland: OR, 1998. 352-355
- 12 Peleg S, Porat B. The Cramer-Rao lower bounds for signals with constant amplitude and polynomial phase. *IEEE Trans on SP*, 1991, 39(5): 749-752